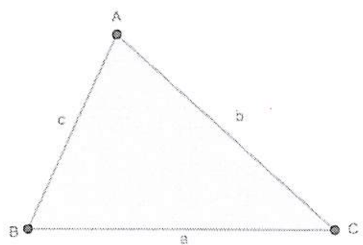
2.3 – LA LOI DU SINUS

Rappels de vocabulaire :
- Un **triangle oblique** est un triangle qui n'a pas d'angle droit.
- **Résoudre un triangle** signifie déterminer les longueurs de tous ses côtés et les mesures de tous ses angles.

Jusqu'à présent, on utilisait les rapports trigonométriques seulement dans les triangles rectangles (SOH CAH TOA).

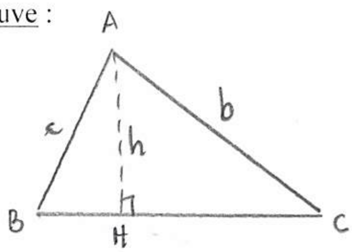
La **loi du Sinus** s'applique dans tous les triangles.

En utilisant les notations standards dans le triangle ci-dessous, la Loi du Sinus est :



$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

Preuve :



Dans le triangle rectangle $\triangle ABH$, on a : $\sin B = \frac{h}{c}$

i.e $h = \sin B \times c$

Dans le triangle rectangle $\triangle ACH$, on a : $\sin C = \frac{h}{b}$

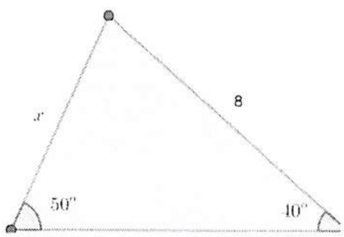
i.e $h = \sin C \times b$

Ainsi : $\sin B \times c = \sin C \times b$ i.e $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Si on reprend le même raisonnement en utilisant la hauteur issue de B, on aurait $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$. Ainsi : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Applications :

- **Déterminer une longueur :**



En utilisant la loi du sinus, on a :

$$\frac{\sin 50}{8} = \frac{\sin 40}{x}$$

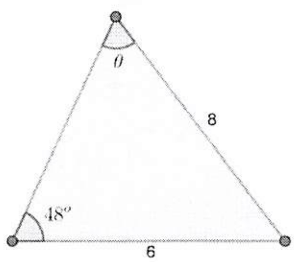
Ainsi : $x = \frac{8 \sin 40}{\sin 50}$ (produit en croix)

$$\boxed{x \simeq 6{,}7}$$

A ton tour :p 103

- **Déterminer un angle :**

a) Déterminer un angle aigu :

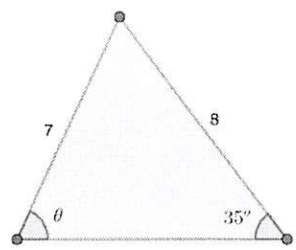


$\frac{\sin 48}{8} = \frac{\sin \theta}{6}$ donc $\sin\theta = \frac{6 \times \sin 48}{8}$

Ainsi : $\theta_R = \sin^{-1}\left(\frac{6\sin 48}{8}\right)$

Comme l'angle est aigu : $\theta = \theta_R \simeq 33{,}9°$

A ton tour :

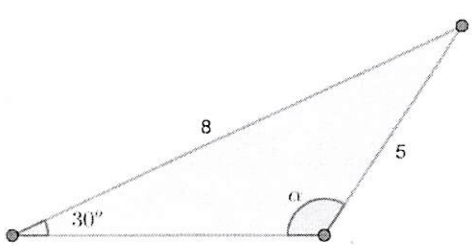


$\frac{\sin 35}{7} = \frac{\sin\theta}{8}$ donc $\sin\theta = \frac{8\sin 35}{7}$

Ainsi : $\theta_R = \sin^{-1}\left(\frac{8\sin 35}{7}\right)$

Angle aigu $\Rightarrow$ $\theta = \theta_R \simeq 41°$

b) Déterminer un angle obtus :



$\frac{\sin 30}{5} = \frac{\sin\alpha}{8}$ donc $\sin\alpha = \frac{8\sin 30}{5}$

Ainsi $\alpha_R = \sin^{-1}\left(\frac{8\sin 30}{5}\right)$

Angle obtus $\Rightarrow$ $\alpha = 180 - \alpha_R$

$\alpha \simeq 127°$

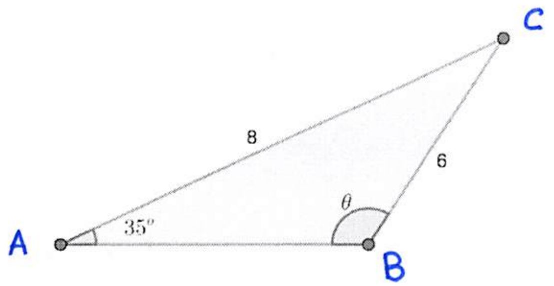
Hwk : p 108 # 1 – 4, 10, 11, 24

c) Le cas ambigu

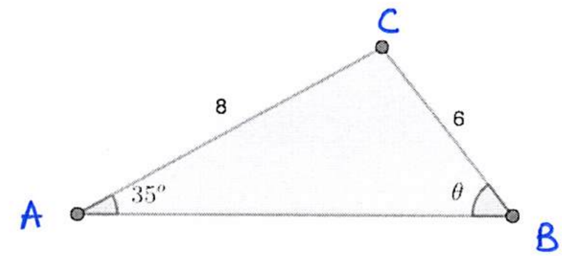
Parfois, les informations que l'on a ne permettent pas de savoir si on cherche un angle aigu ou obtus (soit parce qu'on ne voit pas l'angle, soit parce que le dessin n'est pas à l'échelle…). Dans ce cas-là, on doit résoudre les deux possibilités et donner 2 réponses différentes…

Exemple : On considère un triangle $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 35°$, $a = 6$cm et $b = 8$cm. Détermine $\angle B$.

→ Ici, on ne peut pas savoir à laquelle des options ci-après le triangle ressemble…



ou



Dans les 2 cas, on a : $\dfrac{\sin 35}{6} = \dfrac{\sin\theta}{8}$

donc $\sin\theta = \dfrac{8\sin 35}{6}$

$\theta_R = \sin^{-1}\left(\dfrac{8\sin 35}{6}\right)$

$\theta = 180 - \theta_R$
$\theta \simeq 130°$

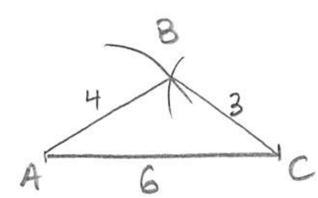
$\theta = \theta_R$
$\theta \simeq 50°$

- **<u>Déterminer le nombre de triangles possibles connaissant des longueurs et des angles :</u>**

Si on nous donne moins de 3 informations, il y a en général une infinité de triangles possibles.

<u>a) si on nous donne 3 longueurs :</u>
Il y a un seul triangle possible tant que la somme de 2 longueurs est toujours plus grande que la 3eme longueur.
On trace le triangle avec un compas.
<u>Exemple :</u> ΔABC tel que $a = 3$cm, $b = 4$cm et $b = 6$cm.

① tracer 1 des cotés
② compas pour les 2 autres longueurs

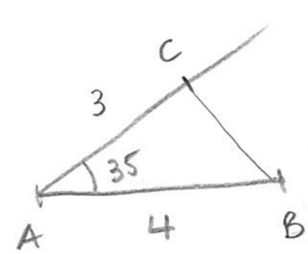


<u>b) si on nous donne 2 longueurs et 1 angle :</u>

- Si l'angle est compris entre les deux longueurs données, il y a toujours 1 seul triangle possible.

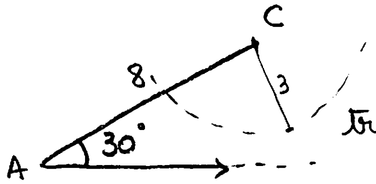
<u>Exemple :</u> ΔABC en notations standards tel que $\angle A = 35°$, $b = 3$cm et $c = 4$cm.

① tracer 1 des cotés
② l'angle
③ mesurer le 2ème coté



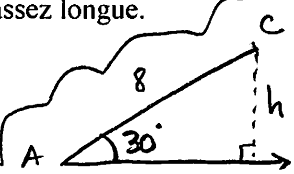
- Si non, ATTENTION il peut y avoir 0, 1 ou 2 triangles possibles !!
  On devra calculer la hauteur du triangle pour savoir si la 2eme longueur est assez longue.

Exemple : $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 30°$, $a = 3$cm et $b = 8$cm.



trop court !

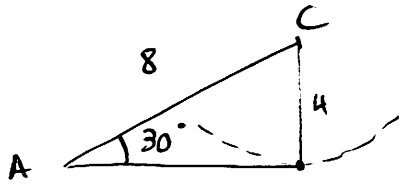
① angle
② coté adjacent à l'angle (vers le haut)



$\sin 30 = \frac{h}{8}$

$h = 8\sin 30 = 4$ ← min nécessaire

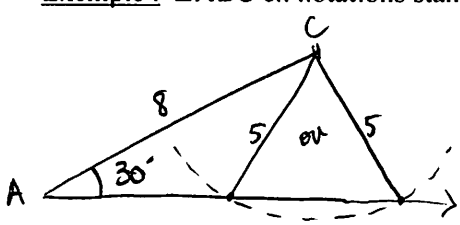
Exemple : $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 30°$, $a = 4$cm et $b = 8$cm.



un seul point possible pour B

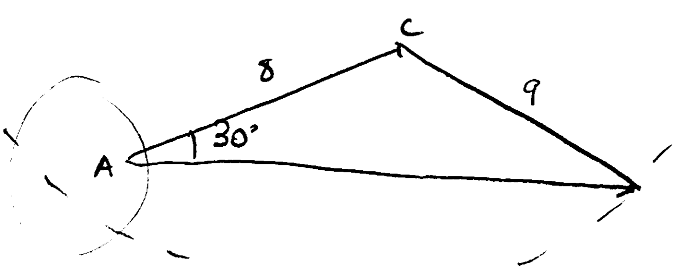
⇒ triangle rectangle en B.

Exemple : $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 30°$, $a = 5$cm et $b = 8$cm.



2 triangles possibles (cf cas ambigu)

Exemple : $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 30°$, $a = 9$cm et $b = 8$cm.



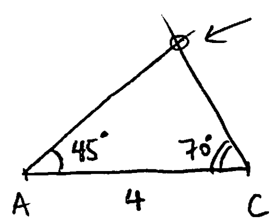
un seul pt possible pour B.

<u>c) si on nous donne 1 longueur et 2 angles :</u>

2 angles, est équivalent à 3 angles (parce que la somme des angles d'un triangle est toujours 180°).
Il y aura 1 seul triangle possible. On le construira avec une règle et un rapporteur.

Exemple : $\triangle ABC$ en notations standards tel que $\angle A = 45°$, $\angle B = 65°$ et $b = 4$cm.

→ on sait déjà que $\angle C = 70°$



un seul pt possible pour B

<u>Hwk</u> : p 108 # 5, 8, 9, 17