6.1 – Les Expressions Rationnelles

Définition :
Une **expression rationnelle** est une expression algébrique qui peut s'écrire comme une fraction de polynômes.

Ex : $\frac{3}{x+1}$; $\frac{x^2-1}{3x-2}$; $4x^2+2x+1$; $3-\frac{2}{x}$; …

Lorsqu'on travaille avec une expression rationnelle, il faut déterminer le **domaine de définition** (c'est-à-dire les valeurs non permises ou restrictions de la variable).
En effet, l'expression n'existe pas si son dénominateur est égal à 0.

Exemples : a) $\frac{5x+1}{3x-4}$ Cette expression n'existe pas si $3x-4=0$

Restrictions : $3x-4 \neq 0$

$3x \neq 4$

$x \neq \frac{4}{3}$

Domaine de définition : $\left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{4}{3}\right\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b) $\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

Restrictions : $(x-1)(x-2) \neq 0$

$x-1 \neq 0$ and $x-2 \neq 0$

$x \neq 1$ and $x \neq 2$

Domaine de définition : $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1; x \neq 2\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

c) $\frac{2x-1}{x^2-x-12}$

Restrictions : $x^2-x-12 \neq 0$

En factorisant ou en utilisant la formule quadratique, on obtient :

$x \neq -3$ and $x \neq 4$

Domaine de définition : $\{x \in \mathbb{R}, x \neq -3; x \neq 4\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$

A ton tour p 312

Définition :
Deux expressions rationnelles sont **équivalentes** (on dit aussi **égales**) si on obtient l'une en multipliant ou divisant le numérateur et le dénominateur de l'autre par une même expression non nulle.

Exemples : $\frac{3(x+1)}{(x-5)(x+1)}$ et $\frac{3}{x-5}$ sont équivalentes.

i.e. $\frac{3x+3}{x^2-4x+5}$ et $\frac{3}{x-5}$ sont équivalentes.

ATTENTION : Deux expressions équivalentes n'ont pas forcément le même domaine de définition !

Pour $\frac{3(x+1)}{(x-5)(x+1)}$ on a $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$

Pour $\frac{3}{x-5}$ on a $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Comme pour les fractions numériques, on va **simplifier** les expressions rationnelles en supprimant les facteurs communs du numérateur et dénominateur. Pour cela il faudra que l'expression soit **FACTORISEE**.
Et les **restrictions** seront celles de **l'expression de départ** (pas encore simplifiée).

Exemple 1 : $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$

Restrictions : $x^2-6x+9 \neq 0$

$(x-3)^2 \neq 0$

$x \neq 3$

Simplification : $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2} = \boxed{\frac{x+1}{x-3}}$

Exemple 2 : $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

Restrictions : $x^2-1 \neq 0$ ou $x^2 \neq 1$

$(x+1)(x-1) \neq 0$ $x \neq \pm 1$

$x \neq \pm 1$

Simplification : $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x+1}$

A ton tour p 316

<u>Hwk</u> p 317 # 1, 4 – 9, 11, 13, 15, 17 (with calc), 19, 22, 24 – 26, 31