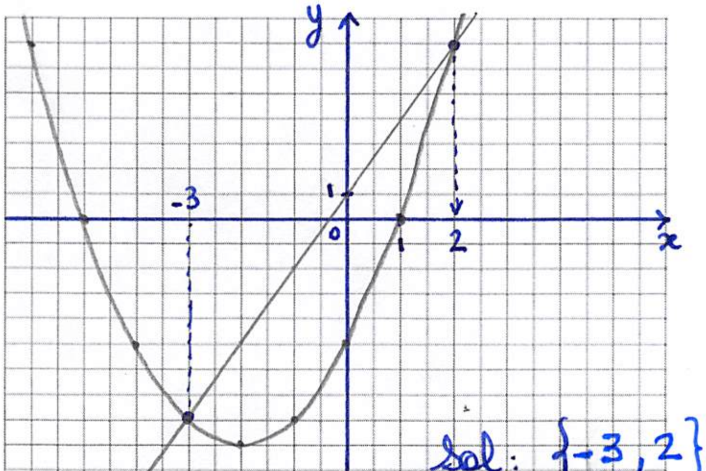
4.1 – Résoudre des équations quadratiques à l'aide d'un graphique

RAPPEL : Résoudre une équation graphiquement signifie représenter graphiquement chacune des expressions de chaque côté du signe « = » et regarder les valeurs de la variable pour lesquelles les deux courbes se croisent…
Dans le cas d'une équation quadratique, au moins une des expressions sera une parabole et l'autre sera soit une autre parabole soit une droite.

Exemple : Résoudre $x^2 + 4x - 5 = 3x + 1$ graphiquement.



- $y = x^2 + 4x - 5$
  sommet : $\frac{-b}{2a} = -2$ $(-2, -9)$
- $y = 3x + 1$
  pente : $\frac{3}{1}$ OAO : 1

Sol : $\{-3, 2\}$

Note : On peut vérifier les solutions obtenues en remplaçant la variable dans l'équation et vérifier l'égalité.

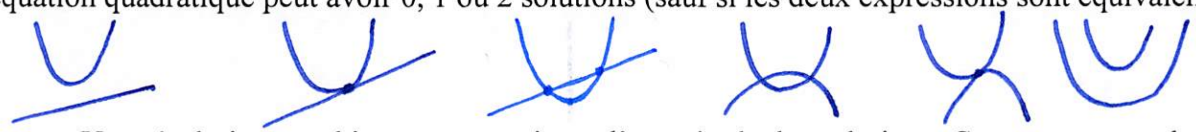
→

$x^2 + 4x - 5$	$3x + 1$
$(-3)^2 + 4(-3) - 5$	$3(-3) + 1$
$9 - 12 - 5$	$-9 + 1$
-8	-8 ✓

$x^2 + 4x - 5$	$3x + 1$
$2^2 + 4(2) - 5$	$3(2) + 1$
$4 + 8 - 5$	$6 + 1$
7	7 ✓

Vocabulaire : Il est toujours possible de mettre tous les termes du même côté du signe « = ».
Dans l'exemple précédent, on obtiendrait $x^2 + x - 6 = 0$.
Les **solutions** d'une telle équation s'appellent aussi les **zéros** (ou abscisses à l'origine) de la fonction $y = x^2 + x - 6$ ou bien encore les **racines** du polynôme $P = x^2 + x - 6$.

Une équation quadratique peut avoir 0, 1 ou 2 solutions (sauf si les deux expressions sont équivalentes…).



Remarque : Une résolution graphique ne garantit pas l'exactitude des solutions. Ce sont souvent des valeurs approchées. L'utilisation de la calculatrice graphique permet d'obtenir des approximations plus précises que nos yeux… (CALC – zeros ou intersect).

Note : Pour pouvoir voir les zéros sur un graphique, il faut faire attention et bien choisir sa fenêtre (échelle, et position des axes). Pour cela, même avec la calculatrice, il est parfois utile entre autre de calculer algébriquement les coordonnées du sommet…

Hwk : p 215 # 1, 2, 3abe, 4ab, 5, 7, 8, 11, 13, 17.

4.2 – RESOUDRE DES EQUATIONS PAR LA FACTORISATION

Pour résoudre une équation quadratique algébriquement, on ne peut pas utiliser les mêmes méthodes que pour les équations linéaires… en effet, on ne peut pas isoler « x »… ex : $2x^2 = 4x - 1$
Il faut donc trouver de nouvelles techniques…

L'utilité principale de la factorisation est la recherche des zéros d'une expression. En effet, un produit ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul…

Exemple 1 : Résoudre $(2x-3)(x+1) = 0$

$\rightarrow$ $2x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$2x = 3$ $\quad$ $x = -1$

$x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ solutions : $\{-1 ; \frac{3}{2}\}$

Exemple 2 : Résoudre $4(x-5)^2 = 0$

$\rightarrow$ $x - 5 = 0$

$x = 5$

$\Rightarrow$ solution : $\{5\}$

METHODE : Pour résoudre une équation par la factorisation il faut mettre tous les termes d'un même côté et factoriser l'expression obtenue pour rechercher les zéros comme dans les deux exemples précédents.

Exemple : Résoudre $x^2 + x - 2 = 2x + 4$ algébriquement par factorisation.

$\rightarrow$ $x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -2$

$\Rightarrow$ solutions $\{-2 ; 3\}$

Hwk : p 229 # 1, 3, 4, 7, 8abc, 9abcd, 11, 12, 16, 17, 19, 20, 23, 24.

Malheureusement, on voit rencontrer cette année des expressions plus difficile a factoriser que celles vues en Math 10…

ADDITIONAL METHODS TO FACTOR:

Example 1: $2(x+4)^2 - 11(x+4) + 15 = 0$

Let $t = x+4$

$2t^2 - 11t + 15 = 0$

$\otimes\ 30$, $\oplus\ -11$: $-5,\ -6$

$2t^2 - 5t - 6t + 15 = 0$

$t(2t-5) - 3(2t-5) = 0$

$(t-3)(2t-5) = 0$

$(x+4-3)(2(x+4)-5) = 0$

$(x+1)(2x+3) = 0$

$x+1 = 0$ $\quad$ $2x+3 = 0$

$\boxed{x=-1}$ $\quad$ $\boxed{x = -3/2}$

Example 2: $(x^2-6)^2 + 7(x^2-6) - 30 = 0$

Let $t = x^2 - 6$

$\otimes\ -30$, $\oplus\ 7$: $10,\ -3$

$t^2 + 7t - 30 = 0$

$(t+10)(t-3) = 0$

$(x^2-6+10)(x^2-6-3) = 0$

$(x^2+4)(x^2-9) = 0$

$(x^2+4)(x+3)(x-3) = 0$

no zero $\quad$ $\boxed{x=-3}$ $\quad$ $\boxed{x=3}$

Example 3: $(2x^2+4)^2 - 16(x^2-1)^2 = 0$

$\left((2x^2+4) + 4(x^2-1)\right)\left((2x^2+4) - 4(x^2-1)\right) = 0$

$(6x^2)(-2x^2+8) = 0$

$\boxed{x=0}$

$-2(x^2-4) = 0$

$-2(x+2)(x-2) = 0$

$\boxed{x=-2}$ $\quad$ $\boxed{x=2}$

Example 4: $3x^4(x+4)^3 - 3x^2(x+4)^4 - 24x^2(x+4)^3 = 0$

$3x^2(x+4)^3\left[x^2 - (x+4) - 8\right] = 0$

$3x^2(x+4)^3(x^2 - x - 12) = 0$

$3x^2(x+4)^3(x-4)(x+3) = 0$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ $\boxed{x=-4}$ $\quad$ $\boxed{x=4}$ $\quad$ $\boxed{x=-3}$

Hwk : p 229 # 5, 6 + extra practice worksheet

METHODES SUPPLEMENTAIRES DE FACTORISATION : **utiliser un zéro…**

Propriété : Si $\propto$ est un zero d'une expression, cela signifie que l'expression peut se factoriser par $(x-\propto)$

Application : Montre que $2x^2 - 9x - 5$ peut se factoriser par $(x - 5)$.

$\rightarrow 2(5)^2 - 9(5) - 5 = 50 - 45 - 5 = 0 \Rightarrow$ oui !

Exemples : a) Est-ce que $(x - 3)$ est un facteur de $3x^2 - 4x - 15$?

$3(3)^2 - 4(3) - 15 = 27 - 12 - 15 = 0$

$\Rightarrow$ oui

b) Est-ce que $(x - 4)$ est un facteur de $2x^2 - 5x + 1$?

$2(4)^2 - 5(4) + 1 = 32 - 20 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ non

c) Est-ce que $(x + 1)$ est un facteur de $4x^2 + x - 3$?

$4(-1)^2 + (-1) - 3 = 4 - 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow$ oui

Note : On peut trouver le facteur manquant en regardant comment se développe un polynôme…

$2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(\quad)$ $\qquad (x-5)(2x+1)$

$3x^2 - 4x - 15 = (x - 3)(\quad)$ $\qquad (x-3)(3x+5)$

$4x^2 + x - 3 = (x + 1)(\quad)$ $\qquad (x+1)(4x-3)$

A ton tour : Même questions avec :

a) $(x - 7)$ et $2x^2 - 15x + 7$ $\rightarrow (x-7)(2x-1)$
b) $(x - 2)$ et $4x^2 - 3x + 1$ $\rightarrow$ non
c) $(x + 3)$ et $x^2 - 2x - 15$ $\rightarrow (x+3)(x-5)$

Remarque : Pour trouver des zéros, on peut regarder dans le tableau de valeurs d'une calculatrice graphique…
Par conséquent, on peut trouver des facteurs en regardant le tableau de valeurs…

Exemple : factorise $5x^2 + 3x - 14$ et $2x^2 - 13x + 21$ à l'aide de ta calculatrice graphique.

$\rightarrow$ $x = -2$ est un zéro $\qquad$ $x = 3$ est un zero

$(x+2)(5x-7)$ $\qquad$ $(x-3)(2x-7)$

Hwk : p 229 # 18

4.3 – RESOUDRE DES EQUATIONS EN COMPLETANT LE CARRE

Résoudre : $x^2 = 9$ $\quad$ $x^2 = 10$ $\quad$ $x^2 = 0$ $\quad$ $x^2 = -4$

$x = 3$ ou $x = -3$ $\quad$ $x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ impossible

L'équation $x^2 = a$ a 2 solutions si $a > 0$
1 solution (dite double) si $a = 0$
aucune solution réelle si $a < 0$

Si une équation quadratique se trouve sous forme canonique on utilise cette propriété pour obtenir les solutions :

Applications :

1) $(x-3)^2 - 16 = 0$

$(x-3)^2 = 16$

$x - 3 = \pm 4$

$x - 3 = -4$ ou $x - 3 = 4$

$x = -1$ $\quad$ $x = 7$

$\Rightarrow$ solutions $\{-1; 7\}$

2) $3(x+5)^2 - 40 = 0$

$3(x+5)^2 = 40$

$(x+5)^2 = \frac{40}{3}$

$x + 5 = \sqrt{\frac{40}{3}}$ ou $x + 5 = -\sqrt{\frac{40}{3}}$

$x = -5 + \sqrt{\frac{40}{3}}$ $\quad$ $x = -5 - \sqrt{\frac{40}{3}}$

$\Rightarrow$ solutions : $\left\{-5 \pm \sqrt{\frac{40}{3}}\right\}$

Remarque : Certaines équations ne peuvent pas se factoriser. Cela ne veut pas dire qu'elles n'ont pas de solutions. Mais les solutions ne sont probablement pas rationnelles…
On peut toujours écrire une équation quadratique sous forme canonique. L'équation aura 2 solutions si le carré parfait est égal a un nombre positif, 1 solution si le carré parfait est égal a 0 et aucune solution si le carré parfait est égal a un nombre négatif…

Exemples : Résoudre

a) $-2x^2 + 4x - 1 = 0$

$\frac{-b}{2a} = 1 \quad (1; 1)$

$-2(x-1)^2 + 1 = 0$

$-2(x-1)^2 = -1$

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}}$

b) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$\frac{-b}{2a} = 1 \quad (1; 1)$

$2(x-1)^2 + 1 = 0$

$2(x-1)^2 = -1$

$(x-1)^2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ aucune solution !

.wk : p 240 # 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 14

4.4 – LA FORMULE QUADRATIQUE

On considère une équation quadratique sous forme générale : $ax^2 + bx + c = 0$. Toute équation quadratique peut s'écrire sous cette forme…

Le **discriminant** Δ d'une expression quadratique permet de connaitre le nombre de zéros. Il est donne par :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Propriété : Si $\Delta > 0$, l'expression a 2 racines réelles.
Si $\Delta = 0$, l'expression a 1 racine réelle double
Si $\Delta < 0$, l'expression n'a aucune racine réelle.

Exemples : Détermine le nombre de solutions des équations suivantes :

a) $-2x^2 + 3x + 8 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(-2)(8)$
$= 9 + 64$
$= 73 \Rightarrow 2$ sol.

b) $3x^2 - 5x = -9$

$3x^2 - 5x + 9 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(9)$
$= 25 - 108$
$= -83 \Rightarrow 0$ sol

c) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$

$\Delta = 9 - 4(\frac{1}{4})(9)$
$= 0$
$\Rightarrow 1$ sol.

Les valeurs des racines sont données par la formule quadratique :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemples : a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4(6) = 1$

$x = \frac{-5 \pm 1}{2}$ → -3 ; -2

b) $x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-2) = 17$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ ← exact values
(≈ -0.56 et 3.56)

c) $-5x^2 + x - 3 = x - 4$

$-5x^2 + 1 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4(-5)(1) = 20$

$x = \frac{0 \pm \sqrt{20}}{-10}$

$x = \frac{\sqrt{20}}{10}$ ou $x = -\frac{\sqrt{20}}{10}$

Note : Si le discriminant est un carré parfait, les racines seront rationnelles… Cela veut aussi dire qu'on aurait aussi pu résoudre par factorisation.

Hwk : p 254 # 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17 – 20.