Chapitre - FACTORISATION

Définitions: Factoriser, c'est transformer une somme en produit.
Développer, c'est transformer un produit en somme.

Une somme est composée de termes sépares par des « + » ou des « – » en dehors de toutes parenthèses.

Exemples :
a) $5x^2 - 3x + 1$ est une somme de 3 termes : $5x^2$, $-3x$ et 1.

b) $2(x-3)^2 + 5$ est une somme de 2 termes : $2(x-3)^2$ et 5.

c) $(x+2)(x-3) - x(2x+1)$ est une somme de 2 termes : $(x+2)(x-3)$ et $-x(2x+1)$

Un produit n'a qu'un seul terme qui est composé de plusieurs facteurs qui se multiplient.

Exemples :
a) $(x+3)(x-2)$ est un produit de 2 facteurs : $x+3$ et $x-2$.

b) $5x(x-1)^2$ est un produit de 4 facteurs : 5, x, et $x-1$ qui est double.

appel sur les développements :

On utilise la distributivité :

Exemples :
a) $(x-3)(2x+5) - 3(2x-1) = 2x^2 + 5x - 6x - 15 - 6x + 3$
$= 2x^2 - 7x - 12$

b) $(3x-1)^2 - (x+5)(3x-2) = 9x^2 - 6x + 1 - (3x^2 - 2x + 15x - 10)$
$= 9x^2 - 6x + 1 - 3x^2 - 13x + 10$
$= 6x^2 - 19x + 11$

c) $(x+1)(x-2)(x+3) = (x+1)(x^2 + 3x - 2x - 6)$
$= x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6$
$= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

d) $(3x-5)(3x+5) - (x+1)^2 = 9x^2 + 15x - 15x - 25 - (x^2 + 2x + 1)$
$= 9x^2 - 25 - x^2 - 2x - 1$
$= 8x^2 - 2x - 26$

On remarque en particulier que : $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

La factorisation par facteur commun:

Le premier réflexe pour factoriser doit être de regarder s'il y a un facteur commun à tous les termes de la somme à factoriser.

Exemples :

a) $12x^2 - 8x =$ $4x(3x-2)$

b) $(x-3)(x+1) + 5x(x+1) =$ $(x+1)\big((x-3)+5x\big)$
$= (x+1)(6x-3)$

c) $(x-2)^2 - 3(x-2) =$ $(x-2)\big((x-2)-3\big)$
$= (x-2)(x-5)$

d) $5x^3 - 25x^2 + 5x =$ $5x(x^2-5x+1)$

ATTENTION : La factorisation par facteur commun doit toujours être la première technique à utiliser!

La factorisation de trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$:

1) Si $a = 1$: C'est-à-dire s'il n'y a pas de nombre devant le x^2.

   Vous avez déjà appris à factoriser ces trinômes en 10eme année.

   Exemples :

   a) $x^2 - 5x + 6 =$ $(x-3)(x-2)$
   $\otimes 6$
   $\oplus -5$

   b) $x^2 + 7x + 6 =$ $(x+6)(x+1)$
   $\otimes 6$
   $\oplus 7$

   c) $25x^2 - 50x + 25 =$ $25(x^2-2x+1) = 25(x-1)^2$

2) <u>Si $a \neq 1$:</u> C'est-à-dire s'il y a un nombre devant le x^2.
C'est plus compliqué! On cherche encore deux nombres mais ils ne nous donnent pas la forme factorisée directement :

Exemples :

a) $2x^2 + 7x - 15 =$ $2x^2 + 10x - 3x - 15$

$\otimes -30$, $\oplus 7$ } 10 ¢ -3

$= 2x(x+5) - 3(x+5)$

$= (2x-3)(x+5)$

b) $6x^2 - 13x - 5 =$ $6x^2 - 15x + 2x - 5$

$\otimes -30$, $\oplus -13$ } -15 ¢ 2

$= 3x(2x-5) + 1(2x-5)$

$= (3x+1)(2x-5)$

c) $6x^2 - 5x + 1 =$ $6x^2 - 3x - 2x + 1$

$\otimes 6$, $\oplus -5$ } -3 ¢ -2

$= 3x(2x-1) - 1(2x-1)$

$= (3x-1)(2x-1)$

<u>La factorisation des trinômes particuliers :</u>

Quand on développe certains produits, on remarque certaines particularités.

1) **Les différences de Carrés :**

Définition : Deux expressions sont dites <u>conjuguées</u>, si l'une est la somme de deux termes et l'autre est la différence des deux mêmes termes.

Exemples :
a) $5x + 3$ et $5x - 3$
b) $-1 + x$ et $1 + x$

REMARQUE : Lorsqu'on multiplie deux expressions conjuguées, on obtient une différence de carrés.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples : a) $(x + 3)(x - 3) =$ $x^2 - 9$

b) $(3x+5)(3x-5) =$ $9x^2 - 25$

Par conséquent, lorsqu'on reconnait une différence entre deux carrés parfaits, on peut la factoriser en un produit de conjugués :

Exemples :
a) $x^2 - 25 =$ $(x+5)(x-5)$

b) $9x^2 - 1 =$ $(3x+1)(3x-1)$

c) $2x^2 - 32 =$ $2(x^2-16) = 2(x+4)(x-4)$

ATTENTION : Une *somme* de carrés ne peut pas se factoriser! ex : $x^2 + 4$

2) Les carrés parfaits :

On appelle carré parfait une expression qui une fois factorisée aura ses deux facteurs identiques.

Exemple : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ → c'est un carré parfait!

Pour reconnaitre un carré parfait, il faut avoir deux carrés et le double produit !!

Exemples :
a) $x^2 - 10x + 25$ $= (x-5)^2$

b) $4x^2 + 4x + 1$ $= (2x+1)^2$

c) $x^2 + 2x + 4$ ce n'est pas un carré parfait ! (et il ne peut pas se factoriser !)

d) $18x^2 - 12x + \cancel{4}\,2$ $= 2(9x^2 - 6x + 1)$
$= 2(3x-1)^2$

Autres techniques de factorisation : Changements de Variables :

Exemple 1 : $2(x+4)^2 - 11(x+4) + 15$ $= 2t^2 - 11t + 15$

soit $t = x+4$

$= 2t^2 - 5t - 6t + 15$

$= t(2t-5) - 3(2t-5)$

$= (t-3)(2t-5)$

$= (x+4-3)(2x+8-5)$

$= (x+1)(2x+3)$

Exemple 2 : $(x^2-6)^2 + 7(x^2-6) - 30$ $= t^2 + 7t - 30$

Soit $t = x^2 - 6$

$= (t+10)(t-3)$

$= (x^2+4)(x^2-9)$

$= (x^2+4)(x+3)(x-3)$

A ton tour : a) p 222

Exemple 3 : $(x^2+3)^2 - 9(x^2-1)^2$ $= (A+B)(A-B)$

$A^2 - B^2$

avec $A = x^2+3$

$B = 3(x^2-1)$

$= (x^2+3+3(x^2-1))(x^2+3-3(x^2-1))$

$= (4x^2)(-2x^2+6)$

$= -2(4x^2)(x^2-3)$

$= -8x^2(x^2-3)$

A ton tour : b) p 222

Hwk : p 229 # 5, 6

Pourquoi factoriser?

La factorisation sert essentiellement à étudier les signes d'expressions (on le verra plus tard : chapitre 9) et a résoudre des équations (on le verra plus précisément dans 4.2).

Review : worksheet (from textbook 10) + p 258 # 6