Nom: Solutions

26

QUIZ Exp & Log - Equations

1. Résous les équations suivantes :

a) $log(x+3) + log\, x = 1$ [3]

Restr: $x+3>0$ et $x>0$ $D =]0;+\infty[$

$x>-3$

Resol: $\log x(x+3) = 1$

$10^1 = x(x+3)$

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$\cancel{x=-5}$ $x=2$

Restr

Solution: $\{2\}$

b $ln(x+6) - ln(x+2) = lnx$ [3]

Restr: $x+6>0$ et $x+2>0$ et $x>0$ $D=]0;+\infty[$.

$x>-6$ $x>-2$

Resol: $\ln(x+6) = \ln x + \ln(x+2)$

$\ln(x+6) = \ln x(x+2)$

$x+6 = x(x+2)$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\cancel{x=-3}$ $x=2$

Restr

Solution: $\{2\}$

c) $27^{x^2+1} = 81^{x+1}$ [2]

$3^{3(x^2+1)} = 3^{4(x+1)}$

$3x^2+3 = 4x+4$

$3x^2-4x-1=0$

$\Delta = 16+12 = 28$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6}$

$\boxed{x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}}$

b) $2^x = 3^{10}$ [2]

$\log 2^x = \log 3^{10}$

$x \log 2 = 10 \log 3$

$\boxed{x = \frac{10 \log 3}{\log 2}}$ ou $x = 10 \log_2 3$

c) $25^{x-3} = 50^{x+1}$ [3]

$(x-3)\log 25 = (x+1)\log 50$

$x \log 25 - x \log 50 = 3 \log 25 + \log 50$

$x(\log 25 - \log 50) = 3 \log 25 + \log 50$

$\boxed{x = \frac{3\log 25 + \log 50}{\log 25 - \log 50}}$ ou $x = \frac{3 \log 25 + \log 50}{-\log 2}$

2. La population d'un certain insecte diminue de moitié chaque nuit ou la température descend en dessous de 0°C. [3]

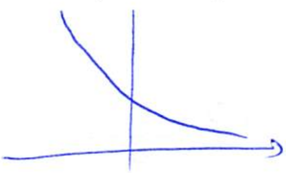
a) Détermine une fonction exponentielle qui modélise la proportion de population restante, P, après *n* nuits ou la température descend en dessous de 0°C.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Quel pourcentage de la population, au centième de pourcent près, reste-t-il après 5 nuits ou la température descend en dessous de 0°C ?

$$P = 100\left(\frac{1}{2}\right)^5 \simeq 3.13\ \%$$

c) Est-ce que la population sera finalement nulle un jour ? Explique.



Mathématiquement non : $I =]0 ; +\infty[$

↑ pas atteint.

Mais, si $P < 1$, cela veut dire qu'il n'y a plus d'insecte. le Modèle est limité

3. Un dollar est investi à 4.5% d'intérêt composé trimestriellement. Quelle est la valeur de l'investissement au bout de 5 ans ? [2]

$\frac{4,5}{4} = 1,125 \Rightarrow 1,125\%$ 4 fois par an.

$$I = 1.01125^{4\times5} \simeq \underline{\underline{1.25\ \$}}$$

4. L'Iodine-131 est une substance radioactive. Supposons qu'un échantillon d'iodine-131 a une masse de 250 grammes au départ, et qu'après 32 jours, il n'en reste plus que 15,625 grammes. Quelle est la demi-vie de l'Iodine-131 ? [3]

$$15,625 = 250 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{32/n}$$

$$0,0625 = \left(\frac{1}{2}\right)^{32/n}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{32/n}$$

$$4 = \frac{32}{n}$$

$$n = \frac{32}{4}$$

$$\boxed{n = 8}$$

Demi-vie : $\underline{\underline{8 \text{ jours}}}$

5. La population d'une ville diminue de 2% chaque année. La population actuelle de la ville est de 11 568. Quelle sera la population au bout de 10 ans ? [2]

$$P = 11568 \times 0.98^{10}$$

$$P \simeq \underline{\underline{9452 \text{ personnes}}}$$

6. Le niveau de son, L, en décibels, est donne par $L = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, ou I est l'intensité du son et I_0 est l'intensité minimale détectable par nos oreilles. [3]

a) Détermine le niveau du son qui est 20 fois plus intense que I_0, au décibel près.

si $I = 20 I_0$, alors

$$L = 10 \log \frac{20 I_0}{I_0} = 10 \log 20 \simeq \underline{\underline{13 \text{ dB}}}$$

b) Le niveau du son dans une chambre la nuit est de 30 dB, alors que le niveau de son d'une conversation normale est de 60 dB. Combien de fois est-ce qu'une conversation normale est-elle plus intense qu'une chambre la nuit ?

$L_C = 30 \Rightarrow 30 = 10 \log \frac{I_C}{I_0}$ i.e $I_C = I_0 \times 10^3$

$L_N = 60 \qquad 60 = 10 \log \frac{I_N}{I_0} \qquad I_N = I_0 \times 10^6$

$\frac{I_N}{I_C} = ?$

$$\frac{I_N}{I_C} = \frac{I_0 \times 10^6}{I_0 \times 10^3} = 10^3 = 1000$$

1000 fois plus intense !